

1 Q 65 $x^5 + x - 1 = 0$

الدالة: $f: x \mapsto x^5 + x - 1$

متصلة و تزايدية **قطعا** لا

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$

اذا كان لها حل فهو **وحيد**

$0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

المعادلة تقبل حلاً **وحيداً** (T.V.I)

B 1 **المصحح**

Q 66 $|z| \bar{z} = 15 - 20i$

$\|z\| = |z|$ و $|\bar{z}| = |z|$

$||z| \bar{z}| = |15 - 20i|$

$\Rightarrow |z| \times |z| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$

$\Rightarrow |z|^2 = \sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{25} = 5$

$|(1+i)z| = |1+i| \times |z|$
 $= \sqrt{1+1} \times 5 = 5\sqrt{2}$

E $5\sqrt{2}$ **المصحح**

Q 67 النهاية على اليمين في 0 تتطابق
 (النهاية في 0 على اليسار)

$x < 0 \Rightarrow x = -|x| = -\sqrt{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

$= -\sqrt{1} = \boxed{-1}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{1} = \boxed{1}$

اذن ليس لها نهاية في 0

E

المصحح

مصحح مقترح لمباراة الطب
 [مادة الرياضيات] 2022 / 2021

Q 61 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\ln(e+x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \times \frac{x - 0}{f(x) - f(0)}$

$g(x) = \sqrt{\ln(e+x)} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2e}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim(\dots) = \frac{\frac{1}{2e}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}$

B $\frac{1}{e}$ **المصحح**

Q 62 $f(x) = \frac{1}{1-x} \ln(1+\frac{x}{2})$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \ln(1+\frac{x}{2}) + \frac{1}{1-x} \times \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{(1-x)^2} \ln(1+\frac{x}{2}) + \frac{1}{x(2-x)}$

B **المصحح**

Q 63 $\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{i(7-15i)}{i(15+7i)}$

$= \frac{i(7-15i)}{15i-7} = \frac{-i(7-15i)}{7-15i} = -i$

$(-i)^{2021} = (-1)^{2021} (i)^{2021}$
 $= -i \times i^{2020} = \boxed{-i}$

D $-i$ **المصحح**

Q 64 $x \in]0; 1[\Rightarrow -x \neq 1$

$1-x+\dots+(-1)^n x^n = (-x)^0+\dots+(-x)^n$

$= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

$-1 < -x < 0 \Rightarrow \lim (-x)^{n+1} = 0$

$\lim \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

E $\frac{1}{1+x}$

المصحح

Q 72 $f'(x)f''(x)$ بأذا

$\frac{1}{2} (f'(x))^2$: مشتقة

اذن : $(f'(x)^2)' = 2 f'(x) f''(x)$

$\Rightarrow \int_1^2 (f'(x)^2)' dx = 2 \int_1^2 f'(x) f''(x) dx$

$\Rightarrow [(f'(x))^2]_1^2 = 2 \times 8$

$\Rightarrow f'(2)^2 - f'(1)^2 = 16$

$\Rightarrow (f'(2) - f'(1))(f'(2) + f'(1)) = 16$

$f'(2) + f'(1) = \frac{16}{2} = 8$: اذن

C 8 : الصحيح

Q 73 ملاحظة : لا يمكن تطبيق القاعدة

$\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1-q^n}{1-q}$

حتى نشك من أن : $q \neq 1$

ولهذا نميز بين حالتين :

$q=1 \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^n 1$

$= \underbrace{1+\dots+1}_n = n$

$\Rightarrow \lim S_n = +\infty$

هذه الحالة مرفوضة لأن : $\lim S_n = 4$

وبالتالي : $q \neq 1$ اذن

$\begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n q^k \\ \lim S_n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_n = q \frac{1-q^n}{1-q} \\ \lim S_n = 4 \end{cases}$

وهذا يستلزم أن : $\lim q^n = 0$ اذن

$4 = q \frac{1-0}{1-q} \Rightarrow 4 = \frac{q}{1-q} \Rightarrow q = \frac{4}{5}$

C $\frac{4}{5}$: الصحيح

Q 68 $f(x) = x^2 + x$ اذن

متصلة و لنبا : $u_{n+1} = f(u_n)$

اذا كانت $l = \lim u_n$ موجودة فإن :

$l = f(l) \Rightarrow l = l^2 + l \Rightarrow l^2 = 0$

$\Rightarrow l = 0$: الصحيح هو : **C**

Q 69 $\frac{x}{1+e^{x^2}} = \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$

$(e^{x^2}+1)' = 2xe^{x^2}$: اذن

$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}} dx = \frac{1}{2} [\ln(e^{x^2}+1)]_0^1$

$= \frac{1}{2} [\ln(e+1) - \ln(2)] = \ln \sqrt{\frac{e+1}{2}}$

D : الصحيح هو

Q 70 f دالة أصلية : اذن f'

$\int_1^e f'(x) dx = [f(x)]_1^e = f(e) - f(1)$

$\Rightarrow \int_1^e (2x + \ln x) dx = f(e) - 4$

$\Rightarrow [x^2]_1^e + \int_1^e \ln(x) dx = f(e) - 4$

$\Rightarrow e^2 - 1 + 4 = f(e) - 4 \Rightarrow f(e) = e^2 + 4$

استعملنا دكالة باجزء :

$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx$

C $e^2 + 4$: الصحيح

Q 71 $z = 1 + i(1 + \sqrt{2})$

$\Rightarrow z^2 = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$\Rightarrow z^2 = [2(\sqrt{2} + 2); \frac{3\pi}{4}]$

$|z| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2)$ و $Arg(z) = \frac{3\pi}{8} [2\pi]$: اذن

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$: نعم

$\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)}$: ومنه

$\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + 1)} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} = |z|$

A : الصحيح هو

3 $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{n}$ نجد

$\lim u_n = +\infty$ إذن

المصحح : **B** $+\infty$

Q 77 $x \mapsto ax + b$ الدالة

متصلة و قابلة للتكامل على $]-\infty, 0[$ على

الدالة : $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ متصلة و قابلة للتكامل على $]0, +\infty[$

إذن : f قابلة للتكامل في 0 إذا وفقط إذا كان :

$f'_y(0) = f'_x(0)$ و :

$\Rightarrow (a = \frac{-1}{(0+1)^2} \text{ و } b = \frac{1}{1+0})$

$\Rightarrow (a = -1 \text{ و } b = 1)$

المصحح : **B** $a = -1 \text{ و } b = 1$

Q 78 $f(x) = 0$ المعادلة

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$\Delta = 4a^2 - 4 \times 3b = 4(a^2 - 3b)$

ولدينا : $\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx < 2 \Leftrightarrow [x^3 + ax^2 + bx]_{-1}^1 < 2$

$\Leftrightarrow (1+a+b) - (-1+a-b) < 2$

$\Rightarrow 1+a+b+1-a+b < 2 \Leftrightarrow b < 0$

إذن : $-3b > 0$ ومنه $\Delta > 0$ إذن حلان :

المصحح : **C** 2

Q 79 $z'' - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$

$\Delta = \sin^2(2\alpha) - 4\sin^2(\alpha)$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$= 4\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) - 4\sin^2(\alpha)$

$= -4\sin^4(\alpha) = (i2\sin^2(\alpha))^2$

حلان عقديان مترافقان : z_1 و z_2

$z_1 = \frac{\sin(2\alpha) - i2\sin^2(\alpha)}{2} = \sin(\alpha)[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)]$

$z_1 = \sin(\alpha)e^{-i\alpha}$

$z_2 = \sin(\alpha)e^{i\alpha}$

Q 74 $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$

$J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ نجد

نلاحظ أن : $I + J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 dx$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

وأيضاً : $I - J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$

$= \left[\ln(\sin(x) + \cos(x)) \right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{6} \\ I - J = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2I = \frac{\pi}{6} \\ I = \frac{\pi}{12} \end{cases}$

المصحح : **E** $\frac{\pi}{12}$

Q 75 $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$= z_1\bar{z}_1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

$= 2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

اذن يكفي حساب $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

لدينا من نفس الطريقة :

$\sqrt{3}^2 = |z_1 + z_2|^2 = 2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$

ومنه : $|z_1 - z_2|^2 = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$

وبالتالي $|z_1 - z_2| = 1$

المصحح هو : **A** 1

Q 76 $v_n = u_n^2$ نضع لكل $n \in \mathbb{N}$

$u_n^2 = \frac{u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2}{2}$ ثم نحط في :

$\Rightarrow v_n = \frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها :

$r = v_1 - v_0 = u_1^2 - u_0^2 = 1$

$v_n = v_0 + nr = n \times 1 = n$ إذن

4 $\Rightarrow \lim a_n = 0$

وهذا ممكن لأن: $0 < a_n < 1$

إذا كان: $\lim na_n = "0^+"$

فإن: $\lim \ln(na_n) = -\lim a_n$

$\Rightarrow -\infty = -\lim a_n$

وهذا مرفوض لأن (a_n) محدودة!

إذا كان: $\lim na_n = e$

فإن: $\ln(e) = -\lim a_n$

$\Rightarrow \lim a_n = -1$

وهذا مرفوض لأن: $0 < a_n < 1$

(اذن نهايتها لا تحقق: $0 \leq l \leq 1$)

و بالتالي الجوابان [B] و [C]

خاطئان:

الصحيح هو:

A

والحمد لله رب العالمين

ملاحظة هامة:

امتحان مادة الرياضيات

صعب جدًا على تلاميذ

مستوى علوم تجريبية

وبالتالي نستنتج أن:

(المثلث: $OM(z_1)M(z_2)$ متساوي الأضلاع)

$\Rightarrow OM(z_1) = OM(z_2) = M(z_1)M(z_2)$

$\Leftrightarrow |\sin(\alpha)| = |\sin(\alpha)(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})|$

$\Leftrightarrow 1 = |2i \sin(\alpha)| = 2|\sin(\alpha)|$

$\Leftrightarrow |\sin(\alpha)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

الصحيح هو: $\frac{\pi}{6}$ [D]

Q 80 $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = e^{-x} - nx$

f_n ق.ن على \mathbb{R} و:

$\forall x \in \mathbb{R}: f_n'(x) = -e^{-x} - n < 0$

f تناقصية حتمًا و بالتالي:

حل المعادلة: $f_n(x) = 0$ موجود

فهو وحيد

لدينا: $f_n(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

$f_n(1) = \frac{1}{e} - n$

$f_n(-1) = e + n > 0$

$n \geq 1 \Rightarrow f_n(1) < 0$ نلاحظ أن:

لأن: $\frac{1}{e} - n \leq \frac{1}{e} - 1 \leq \frac{1-e}{e} < 0$

وبالتالي:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! a_n \in]0; 1[)$

$f_n(a_n) = 0$

وبالتالي الأحيوة التي يمكن اختيارها

هي: [A] أو [B] أو [C]

لدينا: $f_n(a_n) = 0 \Rightarrow na_n = e^{-a_n} > 0$

$\Rightarrow \ln(na_n) = -a_n$

الدالة \ln متصلة.

إذا كان: $\lim na_n = 1$ فإن:

$\ln(1) = -\lim a_n$